

## Transformadores de cuarto de onda.

El acoplamiento de impedancias mediante trombones (stubs) sufre de las siguientes desventajas. En primer lugar, los circuitos con stubs son esencialmente para banda estrecha y su operación se limita a una sola frecuencia más o menos. En segundo lugar, a veces resulta difícil colocar stubs en paralelo, particularmente en circuitos con guías de onda. Se superan estas desventajas usando transformadores de cuarto de onda multiseccionales.

La impedancia de entrada de una línea de transmisión sin pérdidas de longitud eléctrica  $\theta = \beta l$ , de impedancia característica  $Z_2$ , conectada a una carga  $Z_L$ , está dado por

$$Z_{in} = Z_2 \frac{Z_L + jZ_2 \tan \beta l}{Z_2 + jZ_L \tan \beta l} \quad (1)$$

Una sección de cuarto de onda de impedancia característica adecuada se puede usar para acoplar una impedancia de carga positiva  $Z_L$  a otra impedancia  $Z_1$ . De acuerdo con la distribución de la figura 1, y la ecuación (1),

$$Z_{in} = Z_2 \frac{Z_L + jZ_2 \tan(\beta \lambda / 4)}{Z_2 + jZ_L \tan(\beta \lambda / 4)} \quad (2)$$

Si  $Z_2$  se escoge igual a  $\sqrt{Z_1 Z_L}$ , la impedancia de entrada  $Z_{in}$  se hace igual a  $Z_1$  y se obtiene el acoplamiento perfecto en la frecuencia donde la longitud del transformador es un cuarto de la onda ( $\lambda/4$ ) y en todas las armónicas impares, donde la longitud corresponde a  $n\lambda/2 + \lambda/4$ .

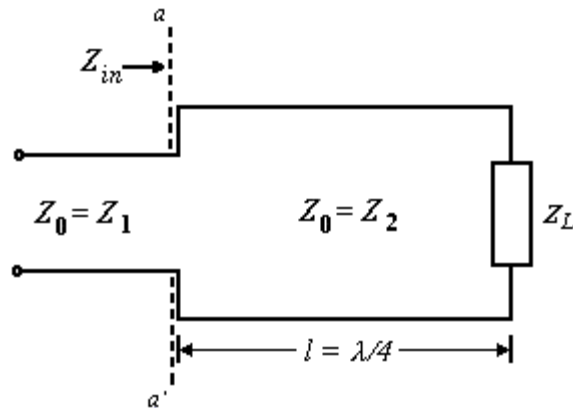


Figura 1.  
Transformador de cuarto de onda.

El ancho de banda de este transformador de sección simple se puede calcular considerando el coeficiente de reflexión en el plano de entrada  $aa'$  de la figura 1. Se tiene

$$\rho = \frac{Z_{in} - Z_1}{Z_{in} + Z_1} \quad (3)$$

y

$$Z_{in} = Z_2 \frac{Z_L + jZ_2 \tan \beta l}{Z_2 + jZ_L \tan \beta l} \quad (4)$$

Con la condición  $Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_L}$ , la ecuación (3) puede escribirse como

$$\rho = \frac{Z_L - Z_1}{Z_L + Z_1 + j \tan \beta l 2 \sqrt{Z_1 Z_L}} \quad (5)$$

y

$$|\rho| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{2 \sqrt{Z_1 Z_L} \sec \theta}{Z_L - Z_1} \right)^2}} \quad (6)$$

donde  $\theta = \beta l$ . Cuando  $\theta$  está próximo a  $\pi/2$ , el sumando 1 en el denominador se puede despreciar y la ecuación (6) se puede aproximar a

$$|\rho| = \frac{|Z_L - Z_1| |\cos \theta|}{2 \sqrt{Z_1 Z_L}} \quad (7)$$

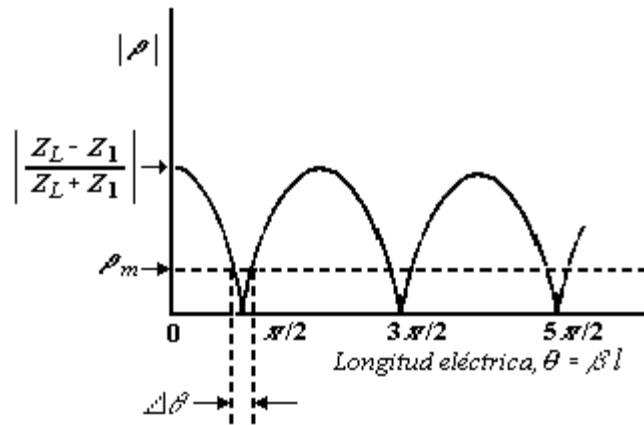


Figura 2.

La variación de  $|\rho|$  sobre la línea.

La figura 2 muestra la variación de  $|\rho|$ . El ancho de banda o rango de frecuencia útil del transformador se puede evaluar si se especifica el valor máximo permisible de  $\rho$  dentro de este rango. En  $\rho_m$ , el valor máximo del coeficiente de reflexión permitido, el ancho de banda útil que proporciona el transformador corresponde al rango  $\Delta\theta$  que se ilustra en la figura 2. El valor de  $\theta$  en el extremo de la banda de paso está dado por

$$\theta_m = \cos^{-1} \left| \frac{2\rho_m \sqrt{Z_1 Z_L}}{(Z_L - Z_1) \sqrt{1 - \rho_m^2}} \right| \quad (8)$$

En el caso de una onda TEM,  $\theta = \beta l = \pi f / 2 f_0$  donde  $f_0$  es la frecuencia para la cual  $\theta = \pi/2$ . En este caso, el ancho de banda es

$$\Delta f = 2(f_0 - f_m) = 2 \left( f_0 - \frac{2f_0}{\pi} \theta_m \right) \quad (9)$$

y el ancho de banda fraccional es

$$\frac{\Delta f}{f_0} = 2 - (4/\pi) \cos^{-1} \left| \frac{2\rho_m \sqrt{Z_1 Z_L}}{(Z_L - Z_1) \sqrt{1 - \rho_m^2}} \right| \quad (10)$$

Existe numerosas situaciones donde el ancho de banda, dada por la ecuación (10) no es adecuado. El aumento del ancho de banda que se requiere en tales casos se puede lograr usando transformadores multiseccionales de cuarto de onda.

Antes de ver el análisis de transformadores multiseccionales, se deben señalar dos limitaciones de este método. Estas son:

- 1) Se supone que las impedancias características  $Z_1$  y  $Z_2$  no dependen de la frecuencia. Para líneas de transmisión, es buena aproximación, pero para guías de onda la impedancia varía con frecuencia.
- 2) Se introducen cambios en las impedancias características al modificarse la sección transversal de la línea de transmisión o de la guía de onda. Existen campos de borde en esas discontinuidades geométricas. Estos campos de discontinuidad se pueden representar con una susceptancia paralela en cada unión. Los elementos susceptibles modifican la operación de cualquier transformador práctico, apartándola de la prevista en base al modelo ideal donde los efectos de unión no se toman en cuenta.

El diseño de transformadores de impedancia multiseccional se puede simplificar al suponer que los coeficientes de reflexión individuales en cada paso son pequeños. Esta aproximación de pequeñas reflexiones se ve ahora.

### Aproximación para reflexiones pequeñas.

Cuando existe cierto número de pequeñas discontinuidades a lo largo de una línea, el coeficiente de reflexión total en la entrada se puede calcular en términos de los coeficientes de reflexión parciales en las diversas discontinuidades usando la aproximación de reflexiones pequeñas.

Considere el caso de dos discontinuidades que se ve en la figura 3. Los coeficientes de reflexión parciales  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  y  $\rho_3$  se definen como

$$\rho_1 = (Z_2 - Z_1) / (Z_2 + Z_1) \quad (11)$$

$$\rho_2 = (Z_1 - Z_2) / (Z_1 + Z_2) = -\rho_1 \quad (12)$$

$$\rho_3 = (Z_L - Z_2) / (Z_L + Z_2) \quad (13)$$

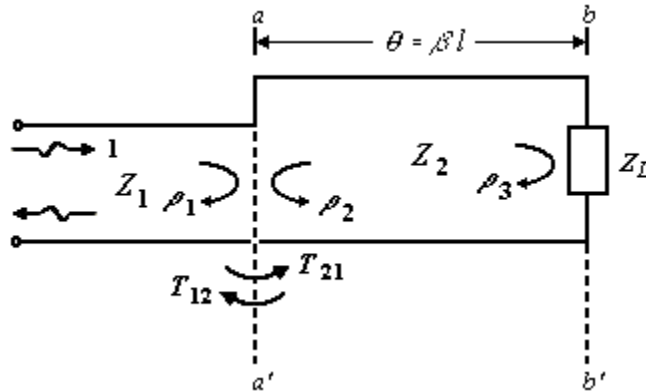


Figura 3.  
El caso de dos discontinuidades.

El coeficiente de transmisión se define como el cociente entre la amplitud de la onda transmitida y la amplitud de la onda incidente y se puede evaluar con el principio de la conservación de potencia. Se puede demostrar que para la unión sin pérdidas,

$$T_{21} = 2Z_2 / (Z_1 + Z_2) = 1 + \rho_1 \quad (14)$$

$$T_{12} = 2Z_1 / (Z_1 + Z_2) = 1 + \rho_2 \quad (15)$$

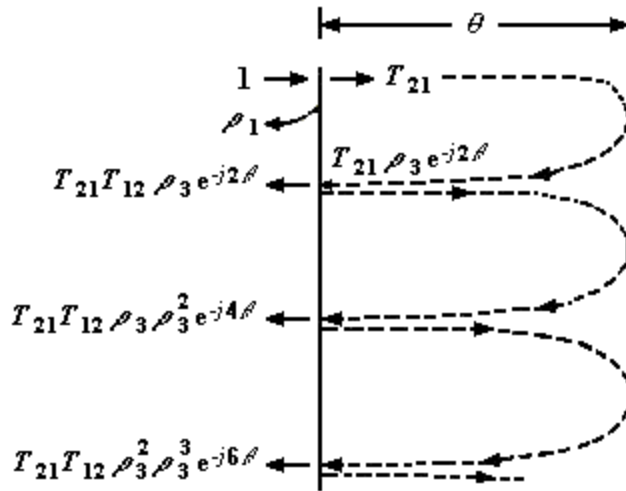


Figura 4.  
Varias componentes que contribuyen a la reflexión en el plano de entrada.

El coeficiente de reflexión de entrada se puede analizar en términos de las reflexiones sucesivas de las dos discontinuidades. En la figura 4 se muestran varias componentes que contribuyen a la reflexión en el plano de entrada. Cuando una onda de amplitud unitaria

incide en  $aa'$ , la onda primaria reflejada parcialmente tiene la amplitud  $\rho_1$ . Como se muestra en la figura 4, la reflexión de segundo orden tiene la amplitud dada por  $T_{12}T_{21}\rho_3e^{-j4\theta}$ . Reflexiones sucesivas de orden superior tienen amplitudes dadas por  $T_{12}T_{21}\rho_3(\rho_2\rho_3)e^{-j4\theta}$ ,  $T_{12}T_{21}\rho_3(\rho_2\rho_3^2)e^{-j6\theta}$ ,  $T_{12}T_{21}\rho_3(\rho_2\rho_3)^3e^{-j8\theta}$ , etc. La onda reflejada total (de amplitud  $\rho$ ) está dada por la suma de todas las ondas parciales que se envían a la izquierda del plano  $aa'$  y se puede escribir como

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_1 + T_{12}T_{21}\rho_3e^{-j2\theta} + T_{12}T_{21}\rho_3\rho_2\rho_3e^{-j4\theta} + T_{12}T_{21}\rho_3(\rho_2\rho_3)^2e^{-j6\theta} + \dots \\ &= \rho_1 + T_{12}T_{21}\rho_3e^{-j2\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \rho_2^n \rho_3^n e^{-j2n\theta}\end{aligned}\quad (16)$$

La serie de la ecuación (16) se puede sumar fácilmente como

$$\rho = \rho_1 + \frac{T_{12}T_{21}\rho_3e^{-j2\theta}}{1 - \rho_2\rho_3e^{-j2\theta}}\quad (17)$$

Con las ecuaciones (14), (15), y (17) se puede escribir como

Note que  $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = (1-r)^{-1}$

y al reemplazar  $T_{12}$  por  $1 + \rho_2 = 1 - \rho_1$  y  $T_{21}$  por  $1 + \rho_1$  nos da

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\rho_1 + (1 - \rho_1)(1 + \rho_1)\rho_3e^{-j2\theta}}{(1 - \rho_2\rho_3e^{-j2\theta})} \\ &= \frac{\rho_1 + \rho_3e^{-j2\theta}}{1 + \rho_1\rho_3e^{-j2\theta}}\end{aligned}\quad (18)$$

Si  $\rho_1$  y  $\rho_3$  se suponen pequeñas comparadas con la unidad, la ecuación (18) se puede escribir apropiadamente como

$$\rho = \rho_1 + \rho_3e^{-j2\theta}\quad (19)$$

Este resultado establece que, para reflexiones pequeñas, el coeficiente de reflexión resultante es precisamente el que se obtiene tomando en cuenta sólo las reflexiones de primer orden. Este es el resultado que se usará para obtener una teoría de primer orden para transformadores de un cuarto de longitud de onda multiseccionales. Como una indicación de la precisión de la fórmula aproximada, se debe notar que si  $|\rho_1| = |\rho_3| = 0.2$ , el error en  $\rho$  no excede el 4 por ciento.